Печатается по решению Редакционно-издательского совета Калининградского государственного университета

УДК 513.73

Статьи настоящего выпуска относятся к следующим разделам дифференциальной геометрии: многообразия квадрик в многомерных и трехмерном пространствах, теория многомерных сетей и тканей, дифференцируемые соответствия, связности, ассоциированные с многообразиями фигур, и структуры на многообразиях.

Сборник рассчитан на научных работников, аспирантов и студентов, специализирующихся в области геометрии.

Дифференциальная геометрия многообразий фигур вып.11. Калининград, 1980 г.

Темплан 1980 г., поз. 113.
Редактор А. М. Соколова. Техн. ред. Н. Д. Шишкова. Корректор В. В. Костина. Подписано к печати 4.04.1980 г. Формат бумаги 60×90¹/₁₆. Офсетный способ печати. Бумага офсетная № 1. 80 г/м². Усл. печ. л. 8. Уч.-изд. л. 7,8. КУ 03259. Заказ 9373. Тираж 500 экз. Цена 80 коп.

Б.А. Андреев

НЕКОТОРЫЕ ТИПЫ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ КОНФИГУРАЦИИИ ОТОБРАЖЕНИЯ f.

Рассматриваются три специальных типа характеристической конфигурации отображения $f\colon P_m \longrightarrow A_n$, где $m>n$ (см.статью [2]). Изучаются свойства присоединенных геометрических образов II-й дифференциальной окрестности в точках пространства P_m, имеющих характеристические конфигурации рассмотренных типов.

I. Введем системы величин

$$\overline{\Lambda}^{\hat\gamma}_{\alpha\hat\beta} = \Lambda^{\hat\gamma}_{\alpha\hat\beta} - \frac{1}{n}\delta^{\hat\gamma}_{\hat\beta}\Lambda^{\hat\eta}_{\alpha\hat\eta}, \quad \overline{\Lambda}^{\hat\gamma}_{\hat\alpha\hat\beta} = \Lambda^{\hat\gamma}_{\hat\alpha\hat\beta} - \frac{1}{n+1}\delta^{\hat\gamma}_{(\hat\beta}\Lambda^{\hat\eta}_{\hat\alpha)\hat\eta}. \qquad (1)$$

Из (8) [2] следует, что если в данной точке P° тензор $\Lambda^{\hat\gamma}_{\alpha\beta}$ обращается в нулевой тензор, то выполняется:

$$\overset{\circ}{\nabla}\overline{\Lambda}^{\hat\gamma}_{\alpha\hat\beta} = 0, \qquad (2)$$

и, таким образом, для точки P° имеет инвариантный смысл условие

$$\Lambda^{\hat\gamma}_{\alpha\beta} = 0, \quad \overline{\Lambda}^{\hat\gamma}_{\alpha\hat\beta} = 0. \qquad (3)$$

Из (8) [2] вытекает также, что если в точке P° выполняется (3), то имеем:

$$\overset{\circ}{\nabla}\overline{\Lambda}^{\hat\gamma}_{\hat\alpha\hat\beta} = 0. \qquad (4)$$

Определение I. Точка P° области определения отображения f называется точкой типа U_1 (U_2, U_3), если для нее выполняются соответственно условия: 1/ $\Lambda^{\hat\gamma}_{\alpha\beta} = 0$; 2/ $\Lambda^{\hat\gamma}_{\alpha\beta} = 0$, $\overline{\Lambda}^{\hat\gamma}_{\alpha\hat\beta} = 0$;

3/ $\Lambda^{\hat\gamma}_{\alpha\beta}=0,\ \bar\Lambda^{\hat\gamma}_{\mathcal{J}\hat\beta}=0.$

Очевидно, точка типа U_3 является частным случаем точки типа U_2', а точка типа U_2 – частным случаем точки типа U_1. В этих точках характеристическая конфигурация отображения f отличается от общего случая, т.е. отображение f претерпевает в них вырождение определенного типа.

Обратимся сначала к случаю $n>1$.

2. Уравнения асимптотического конуса многообразия W_{P^0}

$$X^{\hat\alpha}=0,\ \Lambda^{\hat\gamma}_{\alpha\beta}X^\alpha X^\beta=0, \qquad (5)$$

в точках типа U_1 и только в них равносильны уравнениям $X^{\hat\alpha}=0$ подпространства L^0. Таким образом, справедливо

П р е д л о ж е н и е I. Точка P^0 является точкой типа U_1 в том и только в том случае, когда она является планарной точкой многообразия W_{P^0}.

Из следствия 4 статьи [2] и предложения 1 вытекает, что тип U_1 точки P^0 можно охарактеризовать также условием $L^0\subset\mathcal{J}$.

Уравнения нормали I-го рода H распределения $\{L^0\}$ имеют вид

$$X^\alpha-H^\alpha_{\hat\alpha}X^{\hat\alpha}=0 \quad (\overset{\circ}{\nabla}H^\alpha_{\hat\alpha}=-\Pi^\alpha_{\hat\alpha}) \qquad (6)$$

(см. [1, с.57]). Обобщенный проективитет Бомпиани-Пантази [1, с.84] ставит в соответствие нормали 1-го рода (6) нормаль 2-го рода $s(H)$:

$$X^{\hat\alpha}=0,\ (\Lambda^{\hat\alpha}_{\alpha\hat\alpha}-\Lambda^{\hat\alpha}_{\alpha\beta}H^\beta_{\hat\alpha})X^\alpha+nX^0=0. \qquad (7)$$

В точке типа U_1 проективитет Бомпиани-Пантази вырожден и ставит в соответствие всем нормалям I рода одну и ту же нормаль 2-го рода

$$X^{\hat\alpha}=0,\ \Lambda^{\hat\gamma}_{\alpha\hat\gamma}X^\alpha+nX^0=0. \qquad (8)$$

3. Уравнения фокального многообразия $\mathfrak{U}(H)$ [1, с.81], соответствующего нормали I-го рода H, имеют вид

$$X^{\hat\alpha}=0,\ \det\left(X^0\delta^{\hat\alpha}_{\hat\beta}+X^\alpha(\Lambda^{\hat\alpha}_{\alpha\hat\beta}+\Lambda^{\hat\alpha}_{\alpha\beta}H^\beta_{\hat\beta})\right)=0. \qquad (9)$$

В точках типа U_2 фокальное многообразие (9) одинаково для всех нормалей 1-го рода H и совпадает с нормалью 2-го рода (8).

П р е д л о ж е н и е 2. В точках типа U_2 конус χ характеристических прямых распадается на $(m-n+1)$-плоскости, содержащие подпространство L^0.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнения индикатрисы $\mathcal{J}$ в точках типа U_2 приобретают вид

$$\Lambda^{\hat\gamma}_{\hat\alpha\hat\beta}X^{\hat\alpha}X^{\hat\beta}+2X^{\hat\gamma}\left(\frac{1}{n}\Lambda^{\hat\gamma}_{\beta\hat\gamma}X^\beta+X^0\right)=0. \qquad (10)$$

Из (10) вытекает, что для любых точек $A\in\mathcal{J}$, $B\in L^0$, $(B\neq A)$ и любой точки $C\in[A,B]$ на прямой $[P^0,C]$ существует отличная от P^0 точка $\mathcal{D}$, принадлежащая индикатрисе $\mathcal{J}$. Отсюда следует, что если Λ – характеристическая прямая в P^0, то все прямые связки $\{P^0\}$, которые лежат в $(m-n+1)$-плоскости, натянутой на Λ и L^0, также являются характеристическими прямыми.

4. В точках типа U_3 индикатриса распадается на подпространство L^0 и гиперплоскость

$$\frac{1}{n+1}\Lambda^{\hat\gamma}_{\hat\alpha\hat\gamma}X^{\hat\alpha}+\frac{1}{n}\Lambda^{\hat\gamma}_{\alpha\hat\gamma}X^\alpha+X^0=0. \qquad (11)$$

Гиперплоскость (II) является топологическим замыканием множества $\mathcal{J}\setminus(\mathcal{J}\cap L^0)$. Из предложения 1 работы [2] теперь вытекает.

П р е д л о ж е н и е 3. В точках типа U_3 топологическое замыкание $\overline{\mathfrak{M}}$ множества $\mathfrak{M}$ главных точек является гиперплоскостью.

Следующее предложение является следствием теоремы 1 из [2].

П р е д л о ж е н и е 4. В точках типа U_3 любое направление является характеристическим направлением.

Пусть ℓ -ненулевая (т.е.не лежащая в L°) прямая связки $\{P^\circ\}$.Характеристическая гомография H_ℓ на ней индуцируется теми касательными коллинеациями $K(P_\gamma)$, для которых $K(P_\gamma)(H_\ell \cap \mathcal{M}) \in \pi^\circ$.В точке типа U_3 таким свойством для любой ℓ обладает коллинеация,для которой $K(P_\gamma)(\mathcal{M}) = \pi^\circ$.Таким образом,справедливо

П р е д л о ж е н и е 5. В точке типа U_3 существует касательная коллинеация $K(P_\gamma)$,которая на всех ненулевых прямых связки $\{P^\circ\}$ индуцирует характеристические гомографии.

5.В случае $n=1$ из условия I определения I следуют условия 2 и 3 .Отсюда вытекает следующее утверждение.

П р е д л о ж е н и е 6. При $n=1$ для планарной точки P° многообразия W_{P° выполняется: I/Фокальное многообразие $\mathcal{U}(H)$ является $(n-2)$-плоскостью,общей для всех нормалей I-го рода H ;2/Замыкание $\overline{\mathcal{M}}$ множества $\mathcal{M}$ главных точек является гиперплоскостью; 3/Существует коллинеация $K(P_\gamma)$,индуцирующая характеристические гомографии на всех ненулевых прямых связки $\{P^\circ\}$.

З а м е ч а н и е.Можно показать,что для рассматриваемого случая все 4 условия: I ,2 ,3 и планарность точки P° -эквивалентны.

Список литературы

I.Л а п т е в Г.Ф.,О с т и а н у Н.М.Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности.I.-Тр.геометрич.семинара ВИНИТИ АН СССР,I97I, 235-242.

2.А н д р е е в Б.А.О распределении линейных элементов,порожденных отображением $f: P_m \to A_n$ $(m>n)$.-В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.IO. Калининград,I979,5-9.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.II 1980

О.В.Белякова,Е.А.Хляпова

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КОНГРУЭНЦИЙ ОСНАЩЕННЫХ КОНИК В A_3.

В трехмерном аффинном пространстве рассматриваются цилиндрические конгруэнции,т.е. конгруэнции оснащенных коник $F=\{F_1, F_2\}$,при условии,что точка F_2 описывает цилиндрическую поверхность,которой принадлежат все центральные коники F_1 конгруэнции (F_1) .Основное внимание уделяется изучению конгруэнций K ,являющихся подклассом цилиндрических конгруэнций.Введены ассоциированные с F квадрики и коники,описывающие конгруэнции,найдены и геометрически охарактеризованы их фокальные многообразия.

§ I. Цилиндрические конгруэнции

Отнесем цилиндрическую конгруэнцию к подвижному реперу $R=\{A, \overline{e}_\alpha\}$ $(\alpha,\beta,\gamma=1,2,3)$,начало A которого совмещено с центром коники F_1,конец E_3 вектора $\overline{e}_3$ - с точкой F_2, концы E_i $(i,j,k=1,2)$ векторов $\overline{e}_i$ расположены на конике F_1 таким образом,что AE_1 и AE_2 являются сопряженными диаметрами коники F_1, и AE_1 параллельна касательной плоскости поверхности (F_2) в точке F_2 .

Уравнения коники F_1 относительно выбранного репера R имеют вид:

$$(x^1)^2+(x^2)^2-1=0\ , \quad x^3=0\ . \tag{1}$$

Так как точка $F_2 \equiv E_3$ описывает цилиндрическую поверх-